BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ПОЧТИ ВСЮДУ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА.II.

М.Г.МАХМУДОВА

Бакинский Государственный Университет

Работа посвящена изучению вопросов существования и единственности решения почти всюду одномерной смешанной задачи для одного полулинейного уравнения Буссинеска четвертого порядка. В работе доказаны: теорема о единственности в целом, теорема существования в малом и теорема существования в целом решения почти всюду рассматриваемой смешанной задачи.

В работе изучаются вопросы существования и единственности решения почти всюду следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - 2\alpha u_{txx}(t,x) + u_{xxxx}(t,x) = \\ = F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)) \quad (0 \le t \le T,\ 0 \le x \le \pi) & (1) \\ u(0,x) = \varphi(x) \ \ (0 \le x \le \pi), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \ \ (0 \le x \le \pi), & (2) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\pi) = 0 \ \ (0 \le t \le T), & (3) \end{cases}$$

где $0 < \alpha < 1$; $0 < T < +\infty$; $F, \varphi, \psi -$ заданные функции, а $u(t,x) -$ искомая функция, причём под решением почти всюду задачи (1)-(3) понимаем следующее

Определение. Под решением почти всюду задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, обладающую свойствами:

а) $u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x), u_t(t,x), u_{tx}(t,x) \in C([0,T] \times [0,\pi])$;

$u_{xxxx}(t,x), u_{txx}(t,x), u_{tt}(t,x) \in C([0,T]; L_2(0,\pi))$;

б) все условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле;

в) уравнение (1) удовлетворяется почти всюду в $(0,T) \times (0,\pi)$.

Очевидно, что каждое решение почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx, \tag{4}$$

где

$$u_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t,x)\sin nx\,dx\ \ (n=1,2,\ldots;t\in[0,T]). \qquad (5)$$

Тогда, после применения метода Фурье, нахождение функций $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$, как показано в пункте 4 §1 работы $[1]$, сводится к решению следующей счетной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_n(t)=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot\sin\sqrt{1-\alpha^2}n^2t+\cos\sqrt{1-\alpha^2}n^2t\right)\cdot e^{-\alpha n^2t}\cdot\varphi_n+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}\cdot n^2}\cdot\sin\sqrt{1-\alpha^2}n^2t\cdot e^{-\alpha n^2t}\cdot\psi_n+\frac{2}{\pi\sqrt{1-\alpha^2}\cdot n^2}\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\int_0^{\pi}F(u(\tau,x))\sin nx\cdot e^{-\alpha n^2(t-\tau)}\cdot\sin\sqrt{1-\alpha^2}n^2(t-\tau)\,dx\,d\tau\ \ (n=1,2,\ldots;t\in[0,T]), \qquad (6)$$

где

$$\varphi_n\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx,\quad \psi_n\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(x)\sin nx\,dx\ \ (n=1,2,\ldots), \qquad (7)$$

$$F(u(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)). \qquad (8)$$

Исходя из определения решения почти всюду задачи (1)-(3) легко доказана следующая

Лемма. Если $u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$ - любое решение почти всюду задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ удовлетворяют системе (6).

Далее, с помощью неравенства Беллмана доказана следующая теорема о единственности в целом решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 1. Пусть

1. $F(t,x,u_1,\ldots,u_6)\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6\right)$.

2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^6$

$$\left|F(t,x,u_1,\ldots,u_6)-F(t,x,\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_6)\right|\le C_R\cdot\sum_{i=1}^{6}\left|u_i-\tilde{u}_i\right|, \qquad (9)$$

где $C_R>0-$ постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного решения почти всюду.

Комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке доказана следующая теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях T) решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 2. Пусть

1. $\varphi(x)\in C^{(3)}([0,\pi]),\ \varphi^{(4)}(x)\in L_2(0,\pi)$ и $\varphi(0)=\varphi(\pi)=\varphi''(0)=\varphi''(\pi)=0;$

$\psi(x)\in C^{(1)}([0,\pi]),\ \psi''(x)\in L_2(0,\pi)$ и $\psi(0)=\psi(\pi)=0.$

2. $F(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6),\ F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)\left(i=\overline{0,6}\right)\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6\right).$

3. $F(t,0,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=F(t,\pi,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=0\ \ \forall t\in[0,T],\ \xi_2,\xi_4,\xi_6\in(-\infty,\infty).$

Тогда существует в малом решение почти всюду задачи (1)-(3).

Замечание 1. Отметим, что условия 1 теоремы 2, наложенные на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, не только достаточны, но и необходимы для существования решения почти всюду задачи (1)-(3).

Замечание 2. Так как из условия 2 теоремы 2 следует выполнение всех условий теоремы 1, то при условиях теоремы 2 решение почти всюду задачи (1)-(3) не только существует в малом, но и оно единственное в целом.

Далее, с целью доказательства теоремы существования в целом решения почти всюду задачи (1)-(3), доказаны следующие три теоремы об априорной ограниченности (в определённом смысле) решений почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 3. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид:

$$F(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_t,u_{tx})= \\ = f(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_t,u_{tx})+f_0(x,u)+f_1(t,u_t)\cdot u_{tx}+\left(f_2(x,u_x)\right)_x, \tag{10}$$

причем:

а) $f_0(x,u)\in C([0,\pi]\times(-\infty,\infty))$ и $\forall x\in[0,\pi],\ u\in(-\infty,\infty)$

$$\int_0^u f_0(x,\xi)d\xi\equiv g_0(x,u)\le C\cdot\left(1+u^2\right); \tag{11}$$

б) $f_1(t,V)\in C([0,T]\times(-\infty,\infty));$

в) $f_2(x,V)\in C^1([0,\pi]\times(-\infty,\infty))$ и $\forall x\in[0,\pi],\ V\in(-\infty,\infty)$

$$-\int_0^V f_2(x,\xi)d\xi\equiv g_2(x,V)\le C+\delta\cdot V^2,\ \ 0\le\delta<\frac{1}{2\pi^2}; \tag{12}$$

г) $f(t,x,u_1,\ldots,u_6)\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6\right)$ и в $[0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6$

$$f(t,x,u_1,\ldots,u_6)\cdot u_5\le C\cdot\left(1+u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_5^2\right)+\delta_{00}<2\alpha, \tag{13}$$

$C>0$ – постоянная, а $\alpha\ (0<\alpha<1)$ – число, фигурирующее в уравнении (1)

Тогда для всевозможных решений почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) справедливы априорные оценки:

$$\int_0^\pi u_t^2(t,x)dx\le C_0,\ \int_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx\le C_0\ \ \forall t\in[0,T];\ \int_0^T\int_0^\pi u_{tx}^2(t,x)dxdt\le C_0. \tag{14}$$

Теорема 4. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 3.

2. $\forall R > 0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^2\times(-\infty,\infty)^4$

$$|F(t,x,u_1,\ldots,u_6)| \le C_R\cdot\{1+|u_3|\cdot(|u_3|+|u_3|\cdot|u_5|+u_5^2+|u_6|)+$$
$$+|u_4|\cdot(1+|u_5|)+|u_5|^3+|u_5|\cdot|u_6|+|u_6|\}, \qquad (15)$$

т.е.

$$|F(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_t,u_{tx})| \le C_R\cdot\{1+|u_{xx}|\cdot(|u_{xx}|+|u_{xx}|\cdot|u_t|+u_t^2+|u_{tx}|)+$$
$$+|u_{xxx}|\cdot(1+|u_t|)+|u_t|^3+|u_t|\cdot|u_{tx}|+|u_{tx}|\}, \qquad (16)$$

где $C_R > 0-$ постоянная.

Тогда всевозможные решения почти всюду задачи (1)-(3) априори ограничены в

$$C([0,T];W_2^3(0,\pi))\cap C^{(1)}([0,T];W_2^1(0,\pi)).$$

Теорема 5. Пусть

1. $F(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)$, $F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)$ $\left(i=\overline{0,6}\right)\in C([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6)$.

2. $F(t,0,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=F(t,\pi,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=0 \quad \forall t\in[0,T],\ \xi_2,\xi_4,\xi_6\in(-\infty,\infty)$.

3. Выполнены все условия теоремы 4.

4. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^3\times(-\infty,\infty)\times[-R,R]\times(-\infty,\infty)$

$$|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)| \le C_R\cdot(1+\xi_4^2+\xi_6^2) \quad (i=0,1,2), \qquad (17)$$

$$|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)| \le C_R\cdot(1+|\xi_4|+|\xi_6|) \quad (i=3,5), \qquad (18)$$

$$|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)| \le C_R \quad (i=4,6), \qquad (19)$$

где $C_R > 0-$ постоянная.

Тогда всевозможные решения почти всюду задачи (1)-(3) априори ограничены в

$$C([0,T];W_2^4(0,\pi))\cap C^{(1)}([0,T];W_2^2(0,\pi)).$$

Наконец, пользуясь теоремами 2-5, доказана следующая теорема о существовании в целом решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 6. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 2.
2. Выполнены все условия теоремы 3.
3. Выполнено условие 2 теоремы 4.
4. Выполнено условие 4 теоремы 5.

Тогда задача (1)-(3) имеет единственное решение почти всюду.

Замечание 3. В заключение отметим, что данная работа является продолжением работы [1]-[3], в которых изучены вопросы существования и единственности обобщенного решения задачи (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Махмудова М.Г. Исследование обобщенного решения одномерной смешанной задачи для одного полулинейного уравнения Буссинеска четвёртого порядка.I. -Бакинский Государственный Университет, Баку, 2005 г., 42 с. (рукопись депонирована в АЗНИИНТИ 24.10.2005, №2783-Аз.).
2. Худавердиев К.И., Махмудова М.Г. Исследование обобщенного решения одномерной смешанной задачи для одного полулинейного уравнения Буссинеска четвёртого порядка. – Тезисы Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию со дня рождения чл.корр. НАНА, профессора И.Т.Мамедова, с.85.
3. Махмудова М.Г. Исследование обобщенного решения одномерной смешанной задачи для одного полулинейного уравнения Буссинеска четвёртого порядка.I.-Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2006 г., №1.
4. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений.- Дисс…докт.физ.-мат. наук, Баку, 1973 г., Азербайджанский Государственный Университет, 319 с.

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB YARIM-XƏTTİ BİR BUSSİNESK TƏNLİYİ ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN SANKİ HƏR YERDƏ HƏLLİNİN TƏDQİQİ.II.

M.H.MAHMUDOVA

XÜLASƏ

İş dördüncü tərtib yarım-xətti bir Bussinesk tənliyi üçün birölçülü qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin varlığı və yeganəliyi məsələlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. İşdə baxılan qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin qlobal yeganəliyi, lokal varlığı və qlobal varlığı haqqında teoremlər isbat edilmişdir.

STUDY OF ALMOST EVERYWHERE SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR A SEMI-LINEAR FOURTH ORDER BOUSSINESQ EQUATION. II.

M.H.MAHMUDOVA

SUMMARY

This work is dedicated to the study of existence and uniqueness of almost everywhere solution of one-dimensional mixed problem for a semi-linear fourth order Boussinesq equation. Uniqueness theorem in large, existence theorem in small and existence theorem in large for the almost everywhere solution of the mixed problem under consideration are also proved in this work.